

UM MODELO COMPACTADO PARA O PROBLEMA DE CORTE DE PEÇAS IRREGULARES

Marcos O. Rodrigues

Aline A. S. Leão

Franklina M. B. Toledo

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, ICMC-USP

okamura@icmc.usp.br

aasleao@icmc.usp.br

fran@icmc.usp.br

RESUMO

Neste trabalho é proposta uma formulação matemática compacta para o problema de corte bidimensional irregular. Esta formulação foi desenvolvida com base no modelo de Toledo et al. (2013). Experimentos computacionais indicam que o modelo compactado é eficiente para instâncias com poucas repetições de peças. Além disso, os resultados mostram que a escolha do conjunto de restrições de não sobreposição é fundamental para a qualidade da solução e a redução do tempo computacional de resolução do modelo.

PALAVRAS-CHAVE: Corte e empacotamento, Corte de peças irregulares, Programação inteira mista

1. Introdução

O problema de corte de peças irregulares, também conhecido como problema de *nesting*, consiste em cortar um conjunto de peças bidimensionais irregulares a partir de objetos maiores. Neste trabalho, consideramos um objeto (placa) de altura fixa e comprimento infinito. O objetivo do problema é minimizar o desperdício de material, isto é, o comprimento da placa utilizado para cortar as peças deve ser minimizado. Segundo Wäscher et al. (2007), o problema de *nesting* pode ser classificado como um problema de corte bidimensional, de dimensão aberta com peças irregulares.

Na literatura há quatro modelos de programação inteira mista para representar o problema. Gomes e Oliveira (2006) exploraram um modelo que utiliza tanto variáveis contínuas para definir o posicionamento das peças, quanto variáveis binárias associadas às arestas dos *no-fit polygons* para evitar a sobreposição entre elas. Fischetti e Luzzi (2009) definem o conceito de fatias associadas ao complemento de um *no-fit polygon* e também utilizam variáveis binárias para assegurar a não sobreposição entre duas peças. Alvarez-Valdes et al. (2013) propõem uma revisão da modelagem de Fischetti e Luzzi (2009) e um método *branch-and-cut* para a resolução do problema. Toledo et al. (2013) apresentam um modelo cujas variáveis de decisão são associadas a cada tipo de peça e a cada ponto de uma malha utilizada para discretizar a placa.

O objetivo deste trabalho é estudar o modelo proposto em Toledo et al. (2013), buscando tornar mais eficiente sua resolução. Como o modelo possui um grande número de restrições de não sobreposição, substituiremos este conjunto por outro com um menor número de restrições, resultando em uma nova formulação para o problema.

2. Descrição do problema

O problema de *nesting* abordado neste trabalho pode ser formalmente descrito da seguinte forma. Seja $\mathcal{P} = 1, \dots, P$ um conjunto de peças bidimensionais (não necessariamente distintas) e uma placa retangular de largura fixa W e de comprimento ilimitado. Além disso, considere que cada peça $i \in \mathcal{P}$ seja representada por um polígono e possua um único ponto de referência $v_i = (x_i, y_i)$ associado, que define a sua localização na placa. Assim, o problema de

nesting consiste em encontrar um plano de corte que posicione todas as peças $i \in \mathcal{P}$ no interior da placa sem provocar sobreposições, de tal forma que o comprimento utilizado z da placa seja mínimo.

3. Modelagem matemática

No modelo de Toledo et al. (2013), para cada tipo de peça t e um ponto da placa d pertencente ao *inner-fit polygon* associado ao tipo de peça t , definimos a seguinte variável binária de decisão:

$$\delta_t^d = \begin{cases} 1, & \text{se uma peça do tipo } t \text{ está alocada ao ponto } d \text{ da placa} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (1)$$

O modelo de Toledo et al. (2013) é dado por:

$$\text{minimizar } z \quad (2)$$

Sujeito a:

$$(c_d g_x + x_t^M) \delta_t^d \leq z \quad \forall t \in \mathcal{T}, \forall d \in \mathcal{IFP}_t \quad (3)$$

$$\sum_{d \in \mathcal{IFP}_t} \delta_t^d = q_t \quad \forall t \in \mathcal{T} \quad (4)$$

$$\delta_t^d + \delta_u^e \leq 1 \quad \forall t, u \in \mathcal{T}, t \leq u, \forall d \in \mathcal{IFP}_t, \forall e \in \mathcal{NFP}_{t,u}^d \quad (5)$$

$$\delta_t^d \in \{0, 1\} \quad \forall t \in \mathcal{T}, \forall d \in \mathcal{IFP}_t \quad (6)$$

$$z \geq 0 \quad (7)$$

em que :

c_d é a coluna associada ao ponto d ;

g_x é a granularidade da malha de pontos para o eixo x ;

$\mathcal{T}$ é o conjunto dos tipos de peça;

x_t^M é a coordenada de maior valor no eixo x dos vértices da peça do tipo t ;

q_t é a demanda das peças de tipo t ;

$\mathcal{IFP}_t$ é o *inner-fit polygon* do tipo de peça t ;

$\mathcal{NFP}_{t,u}^d$ é o *nofit polygon* entre os tipos de peças t e u quando uma peça do tipo t é posicionada no ponto d .

A função objetivo (2) em conjunto com as restrições (3) minimizam o comprimento total da placa utilizado (z) para cortar todas as peças. As restrições (4) garantem que todas as peças serão alocadas completamente na placa, enquanto que as restrições (5) impedem a sobreposição das peças. As restrições (6) e (7) definem, respectivamente, o domínio das variáveis de decisão e da variável associada ao comprimento da placa.

No modelo de Toledo et al. (2013), a matriz de restrições do problema possui uma grande quantidade de linhas devido às restrições de não sobreposição das peças (5), que é no pior caso $\mathcal{O}(T^2 D^2)$, em que T é o número de tipo de peças distintas e D é número de pontos da

malha. Assim, caso seja realizada a substituição das restrições (5) por um conjunto equivalente, é possível reduzir a ordem da matriz do problema, o que pode levar a um problema mais fácil de resolver.

O modelo compactado evita a sobreposição das peças considerando simultaneamente todos os pontos de $\mathcal{NFP}_{t,u}^d$ para um determinado ponto d e um par de tipos de peças t e u , ou seja, faz-se um somatório em $\mathcal{NFP}_{t,u}^d$ das restrições (5) para obter as restrições compactas de não sobreposição, dadas por:

$$\sum_{e \in \mathcal{NFP}_{t,u}^d} \delta_u^e \leq M(1 - \delta_t^d) \quad \forall t, u \in \mathcal{T}, t \leq u, \forall d \in \mathcal{IFP}_t. \quad (8)$$

Nas restrições (8) quando a peça t não é alocada ao ponto d tem-se que $\delta_t^d = 0$, logo, o valor de M deve ser suficientemente grande para permitir que seja alocado aos pontos pertencentes ao conjunto $\mathcal{NFP}_{t,u}^d$ o número máximo possível de peças do tipo u . Portanto, um limitante trivial para M é o valor da demanda das peças do tipo u ($M_u = q_u$).

4. Resultados computacionais

Os testes iniciais foram realizados em um computador com processador Intel Core i7-2600 de 3.4 GHz e 16 GB de memória RAM, utilizando o sistema operacional Ubuntu 13.10 64 bits e o solver CPLEX v12.5 para a linguagem C++ (Concert). Foram considerados três grupos de instâncias RCO (Ribeiro et al., 1999), BLAZEWCZ (Oliveira et al., 2000) e SHAPES (Oliveira et al., 2000), com tempo limite de execução de 3600 segundos e a discretização da malha $g_x = g_y = 1$.

A Tabela 1 apresenta os resultados computacionais obtidos para cada modelo. Como esperado, o modelo proposto tem desempenho melhor que o modelo de Toledo et al. (2013) apenas para as instâncias em que o número de repetições de cada peça é pequeno (RCO1, BLAZEWCZ1 e SHAPES2), o que corrobora a importância de escolher um valor adequado para M . Neste sentido, o modelo compactado apresentou resultados tão bons quanto o modelo de Toledo et al. (2013) para quatro instâncias: RCO1, BLAZEWCZ1, SHAPES2 e SHAPES4, mas não foi capaz de encontrar uma solução factível para as instâncias RCO2-5, BLAZEWCZ3-5, SHAPES5-15 ou provar otimalidade para as instâncias BLAZEWCZ2-3.

Tabela 1: Resultados computacionais obtidos para cada modelo.

Instância	Toledo et al.			Compactado		
	z	$GAP(\%)$	Tempo(s)	z	$GAP(\%)$	Tempo(s)
RCO1	8	0	0.19	8	0	0.14
RCO2	15	0	1.43	-	-	TL
RCO3	22	0	17.15	-	-	TL
RCO4	29	3.45	TL	-	-	TL
RCO5	36	2.78	TL	-	-	TL
BLAZEWCZ1	8	0	0.23	8	0	0.19
BLAZEWCZ2	14	0	13.36	15	26.67	TL
BLAZEWCZ3	21	4.76	TL	22	26.36	TL
BLAZEWCZ4	28	22.51	TL	-	-	TL
BLAZEWCZ5	34	14.71	TL	-	-	TL
SHAPES2	14	0	0.58	14	0	0.29
SHAPES4	27	40.74	TL	27	40.74	TL
SHAPES5	32	34.38	TL	-	-	TL
SHAPES7	-	-	TL	-	-	TL
SHAPES9	-	-	TL	-	-	TL
SHAPES15	-	-	TL	-	-	TL

5. Conclusões e/ou perspectivas futuras

Os resultados computacionais mostram que é necessária uma escolha mais adequada para o valor de M nas restrições (8). Assim, como investigação futura, pretendemos resolver um subproblema cujo objetivo é maximizar o número de peças do tipo u que podem ser posicionadas sobre os pontos de $\mathcal{NFP}_{t,u}^d$ sem sobreposição. A Figura 1 (a) ilustra um exemplo de *nofit polygon* entre um quadrado t e um triângulo u , enquanto a Figura 1 (b) ilustra o número máximo de peças que podem ser posicionadas nos pontos de $\mathcal{NFP}_{t,u}^d$ sem sobreposição.

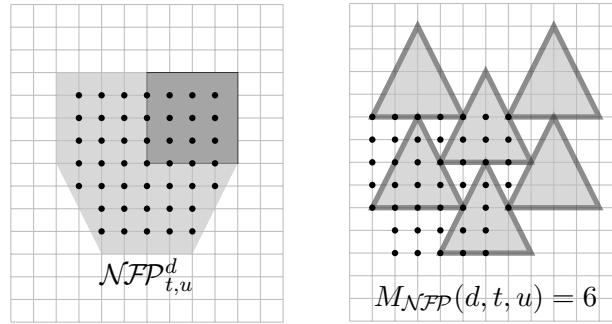


Figura 1: $\mathcal{NFP}_{t,u}^d$ e seu subproblema associado.

Agradecimentos

Este trabalho teve o apoio financeiro do CNPq (300713/2010-0) e da FAPESP (2013/14147-3 e 2010/10133-0).

Referências

- Alvarez-Valdes, R.; Martinez, A.; Tamarit, J.** (2013). A branch & bound algorithm for cutting and packing irregularly shaped pieces. *International Journal of Production Economics*, 145(2), 463 – 477.
- Fischetti, M.; Luzzi, I.** (2009). Mixed-integer programming models for nesting problems. *Journal of Heuristics*, 15(3), 201–226.
- Gomes, A. M.; Oliveira, J. F.** (2006). Solving irregular strip packing problems by hybridising simulated annealing and linear programming. *European Journal of Operational Research*, 171(3), 811 – 829.
- Oliveira, J. F.; Gomes, A. M.; Ferreira, J. S.** (2000). Topos - a new constructive algorithm for nesting problems. *OR-Spektrum*, 22(2), 263–284.
- Ribeiro, C.; Carravilla, M. A.; Oliveira, J. F.** (1999). Applying constraint logic programming to the resolution of nesting problems. *PESQUISA OPERACIONAL*, 19(2), 239–247.
- Toledo, F. M.; Carravilla, M. A.; Ribeiro, C.; Oliveira, J. F.; Gomes, A. M.** (2013). The dotted-board model: A new MIP model for nesting irregular shapes. *International Journal of Production Economics*, 145(2), 478 – 487.
- Wäscher, G.; Haußner, H.; Schumann, H.** (2007). An improved typology of cutting and packing problems. *European Journal of Operational Research*, 183(3), 1109 – 1130.