UMA FORMULAÇÃO NÃO LINEAR PARA A RESTRIÇÃO DE CICLOS DA SERRA NO PROBLEMA INTEGRADO DE DIMENSIONAMENTO DE LOTES E CORTE DE ESTOQUE

Gislaine Mara Melega
Unesp - Ibilce
Depto de Matemática Aplicada, 15054-000, São José do Rio Preto, SP
E-mail: gislainemelega@gmail.com

Silvio Alexandre de Araujo **Socorro Rangel**
Unesp - Ibilce
Depto de Matemática Aplicada, 15054-000, São José do Rio Preto, SP
E-mail: saraujo@ibilce.unesp.br/ socorro@ibilce.unesp.br

RESUMO

Neste trabalho aborda-se o problema integrado de dimensionamento de lotes e corte de estoque em um estudo de caso de uma fábrica de móveis de pequeno porte. Um modelo da literatura é discutido, no qual inclui restrições para o controle do número de ciclos da serra. Propomos uma extensão deste conjunto de restrições que resulta em um modelo não linear.

PALAVRAS-CHAVE: Problema de Dimensionamento de Lotes, Problema de Corte de Estoque, Problema Integrado, Ciclos da Serra

1. Introdução

Estudar o problema de dimensionamento de lotes (*PDL*) de forma integrada ao problema de corte de estoque (*PCE*) constitui uma área de relevância na literatura, devido a sua grande aplicabilidade no setor industrial. O objetivo do problema integrado é capturar a interdependência entre as decisões, além de possibilitar economia de matéria-prima e a diminuição dos custos globais no processo de produção. Assim, o problema integrado de dimensionamento de lotes e corte de estoque consiste em, decidir em cada período do horizonte de planejamento a quantidade de produtos finais (itens) a serem produzidos, de maneira a minimizar o custo total de produção. No custo total são incluídos custos de preparo e estocagem referentes ao problemas de dimensionamento de lotes e a quantidade de objetos a serem cortados, este último é objetivo relacionado ao problema de corte de estoque.

Diversos trabalhos da literatura tratam o *PDL* e o *PCE* integrados em diferentes setores industriais, entre eles Farley (1988), Hendry et al. (1996), Nonas e Thorstenson (2008) e Poltroniere et al. (2008). No setor moveleiro, destacamos os trabalhos de Gramani e França (2006), Gramani et al. (2011), Ghidini e Arenales (2009), Santos et al. (2011) e Alem e Morabito (2012). Vanzela et al. (2013) usaram como ponto de partida o modelo apresentado em Gramani et al. (2011) e acrescentaram restrições referentes ao processo produtivo de uma fábrica de móveis de pequeno porte.

Um aspecto importante considerado no modelo proposto em Vanzela et al. (2013) é a possibilidade da máquina de corte cortar vários objetos simultaneamente. O conjunto de todas as operações necessárias para cortar um, ou mais objetos simultaneamente, de acordo com um determinado padrão de corte é definido como um ciclo da serra (Yanasse et al., 1991).

A partir do modelo proposto por Vanzela et al. (2013), apresentamos uma extensão para a restrição referente ao ciclos da serra, com o intuito de se obter um modelo mais realista. Para o modelo estendido foram propostas abordagens de linearização, já que o mesmo constitui um modelo não linear.

2. Descrição do Problema

A indústria de móveis no Brasil está concentrada em pólos regionais localizados principalmente nas regiões Sul e Sudeste do país. Diversos tipos de matéria-prima são usados na produção de móveis (madeira, metal, plástico, couro). Os pólos da região noroeste do estado de São Paulo são voltados principalmente para a produção de móveis residenciais de madeira (Figueiredo e Rangel, 2008), no qual encontra-se a fabrica deste estudo, aqui denotada por Fábrica L.

A Fábrica L, situada no pólo de Votuporanga, é uma empresa característica do setor e considerada de pequeno porte em função do número de funcionários. A empresa ocupa-se da produção de móveis residenciais de madeira, retilíneos, na sua maioria móveis para dormitório. Para representar o processo de tomada de decisão da Fábrica L Vanzela et al. (2013), fizeram algumas simplificações no processo produtivo.

Simplificações

1. Somente a capacidade do setor de corte é considerada e presume-se que os demais setores podem lidar com as decisões tomadas para o problema de corte de estoque.

2. O tempo de preparo para a máquina de corte e o tempo de troca de padrão de corte não foi levado em consideração. O impacto estimado desta simplificação é levado em consideração indiretamente na capacidade da máquina de corte.

3. O limite de capacidade de produção em termos do número total de ciclos da serra em um dado período é relaxado, de forma que os diferentes padrões de corte podem ser cortados no mesmo ciclo de serra.

4. Atraso na entrega, e horas extras para atender a demanda não são permitidos.

5. As cores dos produtos finais não são considerados.

O problema tratado consiste então em definir o dimensionamento dos lotes de móveis (produtos finais) e o número de objetos a serem cortados (e os respectivos padrões de corte) de forma a minimizar o custo total de produção considerando restrições relativas ao atendimento da demanda dos itens finais e à capacidade da máquina de corte. Neste trabalho a demanda é considerada determinística e a capacidade da máquina de corte é definida em termos do número máximo de ciclos da serra em cada período.

3. Modelagem Matemática

Nesta seção o modelo matemático proposto por Vanzela et al. (2013) para o problema integrado no contexto de fabricação de móveis é apresentado. Para tanto, faz-se o uso dos seguintes índices e dados.

Índices:
$t = 1, \ldots, T$: periodos;
$f = 1, \ldots, F$: produtos finais;
$p = 1, \ldots, P$: peças;
$e = 1, \ldots, E$: espessura da placa;
$j = 1, \ldots, J$: padrões de corte.

Parâmetros:

c_f : custo de produção para o produto f;
h_f : custo de estoque para o produto f;
D_{ft} : demanda por produto f no período t;
o^e : espessura da placa e;
co^e : custo da placa com espessura e;
$\widehat{h}_p^e$: custo de estoque da peça p com espessura e;
C_t : capacidade máxima de produção no período t, contabilizada em número de ciclos da serra;
q_{pf}^e : número de peças p de espessura e necessárias para produzir uma unidade do produto f;
S : altura da serra;
cap^e : número máximo de placas de espessura e que podem ser cortadas simultaneamente ($\lfloor \frac{S}{o^e} \rfloor$);
a_{pj}^e : número de peças p com espessura e presentes no padrão de corte j;
I_{f0} : estoque inicial do produto final f;
IP_{p0}^e : estoque inicial da peça p com espessura e;
ts : porcentagem da demanda utilizada para impor níveis seguros de estoque dos produtos finais;

Variáveis:

X_{ft} : quantidade do produto f produzida no período t;
I_{ft} : quantidade de produto f armazenada no final do período t,
IP_{pt}^e : número de peças p de espessura e armazenadas em período de t,
y_{jt}^e : número de placas de espessura e, cortadas de acordo com o padrão j no período t.

Formulação do Problema: *PIDCM*

$$min \ Z = \sum_{f=1}^{F}\sum_{t=1}^{T}(c_f X_{ft} + h_f I_{ft}) + \sum_{e=1}^{E}\sum_{j=1}^{J}\sum_{t=1}^{T} co^e y_{jt}^e + \sum_{e=1}^{E}\sum_{p=1}^{P}\sum_{t=1}^{T} \widehat{h}_p^e IP_{pt}^e \qquad (1)$$

Sujeito a:

$$X_{ft} + I_{f,t-1} - I_{ft} = D_{ft}, \qquad f = 1,\dots,F;\ t = 1,\dots,T \qquad (2)$$

$$I_{ft} \geqslant tsD_{ft}, \qquad f = 1,\dots,F;\ t = 1,\dots,T-1 \qquad (3)$$

$$I_{fT} \geqslant ts(\sum_{t=1}^{T} D_{ft}), \qquad f = 1,\dots,F \qquad (4)$$

$$\sum_{j=1}^{J} a_{pj}^e y_{jt}^e + IP_{p,t-1}^e - IP_{pt}^e = \sum_{f=1}^{F} q_{pf}^e X_{ft}, \qquad p = 1,\dots,P; t = 1,\dots,T; e = 1,\dots,E \qquad (5)$$

$$\sum_{e=1}^{E}\sum_{j=1}^{J} \frac{y_{jt}^e}{cap^e} \leqslant C_t, \qquad t = 1,\dots,T \qquad (6)$$

$$y_{jt}^e \in \mathbb{Z}_+, \qquad j = 1,\dots,J;\ t = 1,\dots,T;\ e = 1,\dots,E \qquad (7)$$

$$X_{ft}, I_{ft} \in \mathbb{R}_+, \qquad f = 1,\dots,F;\ t = 1,\dots,T \qquad (8)$$

$$IP_{pt}^e \in \mathbb{R}_+, \qquad p = 1,\dots,P;\ t = 1,\dots,T;\ e = 1,\dots,E \qquad (9)$$

A função objetivo (1) minimiza a soma dos custos de produção (c_f), estoque final dos produtos (h_f), custos de matéria-prima (co^e) e os custos de estocar as peças ($\widehat{h}_p^e$). As restrições (2) garantem que a demanda dos produtos finais f seja atendida. As restrições (3) e (4) impõem níveis de estoque de segurança para o produto final f como uma porcentagem da demanda de cada produto. Para os primeiros $(t-1)$ períodos, os níveis de segurança são expressos em termos das demandas individuais (tsD_{ft}), e para o período final, os níveis de estoque de segurança são expressos em termos da demanda total. O conjunto de restrições (5) modela a interdependência entre o *PDL* e o *PCE*, pois considera as decisões relativas ao dimensionamento de lotes (X_{ft}) e a decisão sobre o corte de matéria-prima (y^e_{jt}). O estoque de peças (IP^e_{pt}) é permitido. As restrições (6) garantem o respeito à capacidade de produção (C_t) definida em número de ciclos da serra em cada período t. As restrições (7), (8) e (9) definem domínio das variáveis.

Na simplificação 3 proposta por Vanzela et al. (2013) referente à capacidade da serra, a restrição apresentada constitui uma relaxação para possíveis restrições reais, tais restrições não consideram que padrões de corte distintos não podem compartilhar o mesmo ciclo da serra. Esta restrição foi incluída para evitar que a solução do problema de corte de estoque seja inviável na prática. Na próxima seção será proposta uma reformulação para a restrição (6) a fim de torná-la mais realista.

4. Proposta de Reformulação

O objetivo deste trabalho é apresentar uma reformulação para a restrição referente aos ciclos da serra do problema integrado (restrição 6). Alguns trabalhos na literatura abordam problemas que possuem em sua estrutura o problema do ciclos da serra. Yanasse et al. (1991) desenvolveram uma heurística para resolver o *PCE* bidimensional com o objetivo de reduzir o número de ciclos da serra. Posteriormente Mosquera e Rangel (2007) propuseram 2 variações da heurística apresentada por Yanasse et al. (1991) para um estudo de caso em uma indústria moveleira. Yanasse (2008) mostra que a solução do problema de corte de estoque considerando a redução de ciclos da serra em uma situação de alta demanda é equivalente a resolver o *PCE* com as demandas escaladas pelo número máximo de objetos que a máquina pode cortar ao mesmo tempo. Ranck JR. (2008) propõe um modelo matemático para o problema de corte de estoque que considera a redução do número total de ciclos da serra e o número total de objetos a serem cortados, que pode ser usado tanto no caso unidimensional como no bidimensional, e permite também o uso de ciclos incompletos.

Antes de apresentar a reformulação para a restrição de ciclos da serra consideremos as seguintes definições.

Definição 1. *(Toscano et al., 2013): O* ***número mínimo de ciclos da serra****, necessários para cortar y^e_{jt} objetos de espessura e, de acordo com um determinado padrão de corte j e com a capacidade da máquina é calculado de acordo com.*

$$\left\lceil \frac{y^e_{jt}}{cap^e} \right\rceil \qquad j = 1, \dots, J;\; e = 1, \dots, E \tag{10}$$

A fim de tratar situações encontradas na prática, este trabalho reformula a restrição de ciclos da serra (6) para que seja considerado apenas um tipo de padrão de corte em cada ciclo. Isto é feito ao substituir $\frac{y^e_{jt}}{cap^e}$ por $\left\lceil \frac{y^e_{jt}}{cap^e} \right\rceil$ em (6), obtendo uma nova formulação para a restrição de ciclos da serra expressa pela restrição (11). Ao efetuar esta mudança, o número de ciclos é contado exatamente e uma restrição mais apertada é obtida, já que uma solução que era factível com a restrição (6) pode agora ser infactível. Porém, o problema resultante constitui um problema de otimização não linear.

$$\sum_{e=1}^{E} \sum_{j=1}^{J} \left\lceil \frac{y^e_{jt}}{cap^e} \right\rceil \leq C_t, \qquad t = 1, \dots, T \tag{11}$$

Uma abordagem para lidar com este problema é aplicar uma estratégia linearização na restrição (11), obtendo assim um modelo linear. Uma outra abordagem para lidar com o número de ciclos da serra é proposta em Santos et al. (2011). Os autores dividiram cada período em subperíodos, em que cada subperíodo corresponde a um ciclo da serra, sendo assim é possível saber exatamente quantas placas devem ser cortadas de acordo com cada padrão de corte. Pretende-se com os estudos em andamento linearizar a restrição e comparar com outras estratégias da literatura.

Referências

Alem, D. J.; Morabito, R. (2012). Production planning in furniture settings via robust optimization. *Computers & Operations Research*, 39, 139 – 150.

Farley, A. A. (1988). Mathematical programming models for cutting-stock problems in the clothing industry. *The Journal of Operational Research Society*, 39, 41–53.

Figueiredo, A.; Rangel, S. (2008). Geração de padrões de corte produtivos para a indústria de móveis. Anais do XXXVIII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional - SBPO 1626 – 1636.

Ghidini, C. T. L. S.; Arenales, M. N. (2009). Otimização de processos acoplados na indústria de móveis: dimensionamento de lotes e corte de estoque.

Gramani, M. C. N.; França, P. M. (2006). The combined cutting stock and lot-sizing problem in industrial processes. *European Journal of Operational Research*, 174, 509 – 521.

Gramani, M.; França, P. M.,; Arenales, M. N. (2011). A linear optimization approach to the combined production planning mode. *Journal of the Franklin Institute*, 348, 1523 – 1536.

Hendry, L. C.; Fok, K. K.,; Shek, K. W. (1996). A cutting stock and scheduling problem in the copper industry. *The Journal of the Operational Research Society*, 47, 38 – 47.

Mosquera, G.; Rangel, S. (2007). Redução de ciclos da serra no problema de corte de estoque bidimensional na indústria de móveis. Anais do XXX - Congresso Nacional de Matemática Pura e Aplicada - CNMAC.

Nonas, S. L.; Thorstenson, A. (2008). Solving a combined cutting-stock and lot-sizing problem with a column generating procedure. *Computers & operations research*, 35.

Poltroniere, S. C.; Poldi, K. C.; Toledo, F. M. B.,; Arenales, M. N. (2008). A coupling cutting stock-lot sizing problem in the paper industry. *Annals of Operations Research*, 157.

Ranck JR., R. (2008). Desenvolvimento de alguns métodos de solução para o problema de redução de ciclos da serra. Master's thesis, Dissertação de Mestrado, INPE.

Santos, S.; Araujo, S. A.,; Rangel, S. (2011). Integrated cutting machine programming and lot sizing in furniture industry. *Pesquisa Operacional para o Desenvolvimento*, 3, 249 – 266.

Toscano, A.; Rangel, S.,; Yanasse, H. H. (2013). A heuristic approach to minimize the number of saw cycles in small-scale furniture factories. *Relatório Técnico, DMAp - UNESP*.

Vanzela, M.; Rangel, S.,; de Araujo, S. (2013). A study of the integrated lot sizing and cutting stock problem for furniture production. *Relatório Técnico, DMAp - UNESP*.

Yanasse, H. H. (2008). A note on the minimization of the number of cutting cycles problem. Livro de resumos do XI Simpósio de Pesquisa Operacional e Logística da Marinha - SPOLM.

Yanasse, H. H.; Zinober, A. S. I.,; Harris, R. G. (1991). Two-dimensional cutting stock with multiple stock sizes. *The Journal of the Operational Research Society*, 42, 673 – 683.